BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ada beberapa materi yang terdapat pada aljabar abstrak, salah satu materi tersebut adalah modul.

Untuk membahas pengertian tentang suatu modul harus dimengerti lebih dahulu pengertian – pengertian dari suatu grup, ring, ideal, daerah integral, field dan pemetaan. Dalam hal ini tidak dibicarakan materi – materi tersebut dengan harapan pembaca telah mengenal materi-materi tersebut.

Kemudian dari pembahasan – pembahasan suatu modul, maka dapat dipelajari pengembangan dari suatu modul. Dimana pengembangan dari modul tersebut didasari submodul, homomorfisma modul, modul bebas dan barisan eksak yang akan dipelajari secara singkat.

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor, aksioma yang berlaku pada modul atas ring R sama seperti pada aksioma ruang vektor atau field K. beberapa modul khusus seperti modul bebas yang mempunyai sifat khas, serta modul pada barisan eksak.

Pada barisan eksak terdapat beberapa pembahasan tentang modul yaitu modul proyektif, modul injektif, dan modul flat. Modul proyektif telah diambil dalam skripsi sebelumnya, apabila diberikan ring R, dan P modul atas ring R, P dikatakan proyektif apabila $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ adalah barisan eksak,

$0 \xrightarrow{a} \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{f*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{b} 0$ juga merupakan barisan eksak.

Apabila diberikan ring R, dan Q modul atas ring R maka , Q dikatakan injektif apabila memenuhi pernyataan ekuivalen berikut:

1) Apabila Q modul atas ring R dengan barisan eksak $0 \xrightarrow{a} L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{b} 0$ adalah barisan eksak pendek, maka $0 \xrightarrow{b^*} \mathrm{Hom}_R(N, Q) \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Hom}_R(M, Q) \xrightarrow{\psi'} \mathrm{Hom}_R(L, Q) \xrightarrow{a^*} 0$ adalah juga barisan eksak pendek.

2) Untuk modul atas ring R, L dan M, jika $0 \to L \xrightarrow{\psi} M$ eksak maka untuk setiap homomorfisma modul atas ring R dari L ke Q terdapat homomorfisma modul atas ring R dari M ke Q, sehingga $f \epsilon \mathrm{Hom}_R(L, Q)$ terdapat $g \epsilon \mathrm{Hom}_R(M, Q)$, $f = F \circ \psi$ seperti diagram komutatif:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & L \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

3) Selanjutnya jika Q adalah submodul, M modul atas ring R, maka Q adalah direct summand M dan setiap barisan eksak $0 \to Q \to M \to N \to 0$ split.

Sebuah Q modul atas ring R dikatakan *injektif* jika pernyataan ekuivalen pada kondisi di atas

1.2. Permasalahan

Pemasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana sebuah Q modul atas ring R dikatakan injektif pada barisan eksak?

1.3. Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah yang dihadapi adalah ring R didalam modul yaitu ring yang komutatif, hal tersebut akan dikaji atau dipelajari dalam teori modul meliputi definisi-definisi, teorema serta bukti-bukti yang terkait dengan modul injektif.

1.4. Metode Penulisan

Penulisan tugas akhir ini dilakukan dengan studi literatur, yaitu dengan mempelajari materi-materi yang terkait dengan modul injektif, seperti: modul, submodul, modul homomorfisma, teorema isomorfisma, direct summand, modul bebas, barisan eksak dan teorema-teorema yang berkaitan beserta hubungan antar materi-materinya .

1.5. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan dari tugas akhir ini adalah mempelajari tentang modul injektif dan materi-materi yang mendukung sehingga dapat memperluas pengetahuan dan dapat lebih memahami tentang modul injektif.

1.6. Sistematika Penulisan

Di dalam penyusunan tugas akhir ini secara keseluruhan terdiri dari 4 bab yang dilengkapi oleh kata pengantar, daftar isi, daftar lampiran dan lampiran-lampiran yang mendukung. Secara garis besar, sistematika pembahasan pada tugas akhir ini adalah BAB I berisi pendahuluan, bab ini dikemukakan tentang latar belakang masalah pembuatan tugas akhir, perumusan masalah yang dihadapi di dalam menyusun tugas akhir, pembatasan masalah tugas akhir, tujuan tugas akhir dan sistematika pembahasan laporan tugas akhir yang menerangkan sekilas dari isi tiap bab yang terdapat pada laporan tugas akhir ini. BAB II berisi materi penunjang mengenai materi yang terkait dengan modul, submodul, homomorfisma modul, teorema Isomorfisma, dan dirrect summand, BAB III pembahasan mengenai barisan eksak dan modul injektif dan BAB V berisi penutup.

BAB II

MATERI PENUNJANG

Untuk mempermudah pemahaman pada bab selanjutnya, pada bab ini akan dibahas beberapa definisi, teorema dan contoh yang mendukung materi pokok. Bab ini terdiri dari lima subbab yaitu modul, submodul, homomorfisma modul, teorema isomorfisma, dan dirrect summand.

2.1 Modul

Dalam teori modul tidak lepas dari struktur grup dan ring. Dalam hal ini grupnya adalah grup abelian dan ring dengan elemen satuan.

Definisi 2.1.1 [1]

Diberikan ring R, M disebut modul atas ring R jika memenuhi:

(1) M terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif

(2) Untuk setiap $r \in R$, $m \in M$ didefinisikan perkalian skalar $rm \in M$ telah memenuhi :

(i) $(r+s)m = rm + sm$, untuk semua $r, s \in R, m \in M$,

(ii) $(rs)m = r(sm)$, untuk semua $r, s \in R, m \in M$,

(iii) $r(m+n) = rm + rn$, untuk semua $r \in R, m, n \in M$,

(iv) $1m = m$ untuk semua $m \in M$ dimana 1 adalah elemen identitas dari R.

Contoh 2.1.2:

1) Diberikan ring R yang didefinisikan dengan

$R^n = \underbrace{R \times \dots \times R}_{n\,kali} = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) | r_i \in R^n,\ i = 1,2 \dots, n\}$ untuk setiap $r_i \in R^n, i = 1,2 \dots, n$ adalah modul atas ring R ,

pada R^n didefinisikan operasi penjumlahan dengan

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$$

untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$.

(1) Akan ditunjukkan bahwa R^n grup abelian terhadap operasi penjumlahan memenuhi:

(a) Untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n , i = 1,2 \dots, n,$

$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n) \in R^n.$

Jadi R^n tertutup pada operasi penjumlahan.

(b) Untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n), (t_1, t_2, \dots, st_n) \in R^n , i = 1,2 \dots, n,$

$[(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)] + (t_1, t_2, \dots, t_n)$

$= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n) + (t_1, t_2, \dots, t_n)$

$= (r_1 + s_1 + t_1, r_2 + s_2 + t_2, \dots, r_n + s_n + t_n)$

$= (r_1 + (s_1 + t_1), r_2 + (s_2 + t_2), \dots, r_n + (s_n + t_n))$

$= (r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1 + t_1,\ s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n)$

$= (r_1, r_2, \dots, r_n) + [(s_1, s_2, \dots, s_n) + (t_1, t_2, \dots, t_n)\ ] \in R^n.$

Jadi R^n assosiatif pada operasi penjumlahan.

(c) Untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$, $i = 1{,}2 \dots, n$,

elemen identitasnya adalah $(r_1, r_2, \dots, r_n) + (0{,}0, \dots, 0) = (r_1 + 0, r_2 + 0, \dots, r_n + 0) = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$.

Jadi R^n mempunyai elemen identitas pada operasi penjumlahan.

(d) Untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n, i = 1{,}2 \dots, n,$ invers dari $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ adalah $(-r_1, -r_2, \dots, -r_n)$.

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (-r_1, -r_2, \dots, -r_n) = (r_1 - r_1, r_2 - r_2, \dots, r_n - r_2)$$
$$= (0{,}0, . .0) \in R^n.$$

Jadi R^n mempunyai invers pada operasi penjumlahan.

(e) Komutatif

untuk setiap $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$, $i = 1{,}2 \dots, n,$

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$$
$$= (s_1 + r_1\ ,\ s_2 + r_2, \dots ., s_n + r_n)$$
$$= (s_1, s_2, \dots, s_n) + (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n\ .$$

Jadi R^n komutatif pada operasi penjumlahan.

Jadi R^n grup abelian terhadap operasi penjumlahan .

(2) Untuk setiap $\lambda \in R$, $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, didefinisikan perkalian skalar $\lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) = (\lambda r_1, \lambda r_2, \dots, \lambda r_n) \in R^n$.

Akan ditunjukkan perkalian skalar memenuhi aksioma modul,

$\lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) = (\lambda r_1, \lambda r_2, \dots, \lambda r_n) \in R^n$.

(i) $(\lambda + \mu)(r_1, r_2, \dots, r_n) = \lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) + \mu(r_1, r_2, \dots, r_n)$, untuk semua $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, $\lambda, \mu \in R$,

$(\lambda + \mu)(r_1, r_2, \dots, r_n) = ((\lambda + \mu)r_1, (\lambda + \mu)r_2, \dots, (\lambda + \mu)r_n)$

$= \big((\lambda r_1 + \mu r_1), (\lambda r_2 + \mu r_2), \dots, (\lambda r_n + \mu r_n)\big)$

$= (\lambda r_1, \lambda r_2, \dots, \lambda r_n) + (\mu r_1, \mu r_2, \dots, \mu r_n)$

$= \lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) + \mu(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

(ii) $\lambda[(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)] = \lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) + \lambda(s_1, s_2, \dots, s_n)$ untuk semua $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$, $\lambda \in R$,

$\lambda[(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)] = \lambda(r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$

$= (\lambda(r_1 + s_1), \lambda(r_2 + s_2), \dots, \lambda(r_n + s_n))$

$= ((\lambda r_1 + \lambda s_1), (\lambda r_2 + \lambda s_2), \dots, (\lambda r_n + \lambda s_n))$

$= (\lambda r_1, \lambda r_2, \dots, \lambda r_n) + (\lambda s_1, \lambda s_2, \dots, \lambda s_n)$

$= \lambda(r_1, r_2, \dots, r_n) + \lambda(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

(iii) $\lambda\mu(r_1, r_2, \dots, r_n) = \lambda\big(\mu(r_1, r_2, \dots, r_n)\big)$ untuk semua $\lambda, \mu \in R$, $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$,

$\lambda\mu(r_1, r_2, \dots, r_n) = (\lambda\mu r_1, \lambda\mu r_2, \dots, \lambda\mu r_n)$

$= \lambda(\mu r_1, \mu r_2, \dots, \mu r_n)$

$= \lambda\big(\mu(r_1, r_2, \dots, r_n)\big)$.

(iv) $1(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ untuk semua $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$ dimana 1 adalah elemen identitas dari R^n,

$1(r_1, r_2, \dots, r_n) = (1r_1, 1r_2, \dots, 1r_n)$

$= (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Jadi R^n adalah modul atas ring R.

2) Diberikan ring R, yang didefinisikan dengan

$$M_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \middle| r_{ij} \in R, i, j = 1,2, \dots, n \right\}$$

adalah modul atas ring R.

(1) Akan ditunjukkan bahwa $M_n(R)$ adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, mengikuti contoh 2.1.1 nomor 1).

(2) Untuk setiap $\lambda \in R$, $\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R)$ terdapat pemetaan

$$f: \lambda \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \to M_n(R), \lambda \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R),$$

$$\lambda \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda r_{11} & \cdots & \lambda r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda r_{n1} & \cdots & \lambda r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R) .$$

(i) $(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$,

untuk semua $\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R)$, $\lambda, \mu \in R$,

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) r_{11} & \cdots & (\lambda + \mu) r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda + \mu) r_{n1} & \cdots & (\lambda + \mu) r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda r_{11} + \mu r_{11} & \cdots & \lambda r_{1n} + \mu r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda r_{n1} + \mu r_{n1} & \cdots & \lambda r_{nn} + \mu r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda r_{11} & \cdots & \lambda r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda r_{n1} & \cdots & \lambda r_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu r_{11} & \cdots & \mu r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu r_{n1} & \cdots & \mu r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R) .$$

(ii) $\lambda\left(\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} +$

$\lambda\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$ untuk semua $\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \in$

$M_n(R), \lambda \in R,$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$\lambda\begin{pmatrix} r_{11} + s_{11} & \cdots & r_{1n} + s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} + s_{n1} & \cdots & r_{1nn} + s_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(r_{11} + s_{11}) & \cdots & \lambda(r_{1n} + s_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(r_{n1} + s_{n1}) & \cdots & \lambda(r_{1nn} + s_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda r_{11} & \cdots & \lambda r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda r_{n1} & \cdots & \lambda r_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda s_{11} & \cdots & \lambda s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda s_{n1} & \cdots & \lambda s_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R).$$

(iii)$(\lambda\mu)\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \lambda(\mu\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix})$ untuk semua

$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R), \lambda, \mu \in R,$

$$(\lambda\mu)\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu r_{11} & \cdots & \lambda\mu r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\mu r_{n1} & \cdots & \lambda\mu r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} \mu r_{11} & \cdots & \mu r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu r_{n1} & \cdots & \mu r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\mu\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}) \in M_n(R).$$

(iv) $1\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$ untuk semua $\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$

$\in M_n(R)$ dimana 1 adalah elemen identitas dari $M_n(R)$,

$$1\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1r_{11} & \cdots & 1r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1r_{n1} & \cdots & 1r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R).$$

Jadi $M_n(R)$ adalah modul atas ring *R*.

2.2 Submodul

Definisi 2.2.1 [1]

Diberikan ring *R* dan *M* adalah modul atas ring *R*, *N* adalah submodul atas ring *R* jika *N* subgroup dari *M* dan untuk setiap $r \in R, n \in N,\ rn \in N$.

Contoh 2.2.2:

1) Dari contoh 2.1.2 untuk ring R, diketahui bahwa R^n modul atas ring R, jika diambil $N = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) | r_i \in R^n,\ i = 1,2 \ldots, n\}$, maka N merupakan modul atas bagian R^n atas ring R.
2) Misalkan *R* ring dari himpunan semua bilangan riil, maka *R* dapat dipandang sebagai modul atas *R* sendiri, sedangkan *Q* himpunan semua

bilangan rasional adalah grup bagian R terhadap penjumlahan, tetapi untuk setiap $r \in R$ dan rq belum tentu di dalam Q,

jadi Q bukan modul atasbagian R atas ring R.

Dari contoh di atas diperoleh bahwa setiap modul bagian adalah grup bagian R terhadap penjumlahan, tetapi setiap grup bagian terhadap penjumlahan belum tentu modul bagian.

Teorema 2.2.3

Diberikan M modul atas ring R, $N \subseteq M$ merupakan submodule M jika dan hanya jika:

1) $N \neq 0$,
2) $x + ry \in N$,untuk setiap $r \in R$ dan $x, y \in N$.

Bukti:

1) $\Leftarrow$ Untuk setiap $x, y \in N, -1 \in R$,

$x - y = x + (-1)y \in N,$

maka N subgroup M.

Untuk setiap $r \in R, y \in N,$

$ry = 0 + ry \in N.$

$\Rightarrow N \neq 0.$

2) N submodul M akan ditunjukkan bahwa:

1) N ≠ 0,

2) $x + ry \in N$, $r \in R$ dan $x, y \in N$,

karena N submodul M maka $N \neq 0$,

$x \in N$ adalah subgrup dan $xy \in N$ subgrup pada penjumlahan maka $x + ry \in N$

Jadi N submodul dari M.

2.3 Homomorfisma Modul

Definisi 2.3.1. [1]

Diberikan ring R, M dan N modul atas ring R.

(1) Pemetaan $\varphi : M \to N$ disebut homomorfisma modul atas R jika :

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, untuk setiap $x, y \in M$,

b) $\varphi(rx) = r\,\varphi(x)$, untuk setiap $r \in R$, $x \in M$.

(2) Jika homomorfisma modul atas R, $\varphi : M \to N$ surjektif, maka φ disebut ephimorfisma.

(3) Jika homomorfisma modul atas R, $\varphi : M \to N$ injektif, maka φ disebut monomorfisma.

(4) Jika homomorfisma modul atas R , $\varphi : M \to N$ bijektif, maka φ disebut isomorfisma.

(5) Jika $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma modul atas R, maka

$ker\ (\varphi) = \{m \in M, \varphi(m) = 0\}$,

$\varphi(M) = \{n \in N, n = \varphi(m), m \in M\}$.

(6) $Hom_R(M, N)$ adalah himpunan semua homomorfisma modul atas R dari M ke N.

(7) Dua modul *M* dan *N* atas ring *R* dikatakan isomorfik ditulis dengan $M \cong N$ jika tedapat isomorfisma modul atas *R* dari *M* pada *N*.

Contoh 2.3.2:

1) Diberikan R ring $R^2 = \{(x,y)|x,y \in R\}$.

   Didefinisikan : $R^2 \to R, \varphi(x,y) = x$.

   Akan ditunjukkan bahwa φ homomorfisma untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^2$ dan $r, \lambda \in R$ diperoleh:

   a) $\varphi\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right)$

      $= \varphi(\,(x_1 + y_1), (x_1 + y_2))$

      $= x_1 + y_1$

      $= \varphi\,(x_1) + \varphi\,(y_1\,)$.

   b) $\varphi\left(\lambda(x_1, y_1)\right)$

      $= \varphi(\lambda x_1, \lambda y_1)$

      $= \lambda x_1$

      $= \lambda\,\varphi(x_1)$.

   Jadi φ homomorfisma

   $\varphi(R^n) = Im(\varphi) = R$,

   $\ker(\varphi) = \{(0,y)|x,y \epsilon R\}$.

2) Diberikan modul R^2 dan $\mathbb{C}$ atas R dimana R himpunan semua bilangan riil dan $\mathbb{C}$ himpunan semua bilangan komplek .

Didefinisikan $\varphi: R^2 \to \mathbb{C}$, untuk setiap $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2, r \in R$ dan i adalah bilangan imaginer,

$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + ix_2, \quad \varphi(y_1, y_2) = y_1 + iy_2.$

Akan ditunjukkan bahwa φ homomorfisma

a. $\varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$= (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$

$= x_1 + ix_2 + y_1 + iy_2$

$= \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2).$

b. $\varphi(r(x_1, x_2)) = \varphi(rx_1, rx_2)$

$= rx_1 + i\, rx_2$

$= r(x_1 + ix_2)$

$= r\, \varphi(x_1, x_2)$.

Jadi φ homomorfisma.

Akan ditunjukkan φ bijektif

a) φ injektif

$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2),$

$x_1 + ix_2 = y_1 + iy_2,$

maka $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, sehingga φ injektif.

b) φ surjektif

untuk setiap $(x_1 + ix_2) \epsilon \mathbb{C} \exists (x_1, x_2) \epsilon R^2$,

sehingga $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + ix_2$, maka φ surjektif .

Jadi φ bijektif.

Sehingga diperoleh $R^2 \cong \mathbb{C}$.

Teorema 2.3.3 [1]

Diberikan $M, N\ dan\ L$ modul atas ring R.

1) Pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah homomorfisma modul atas ring R jika dan hanya jika $\varphi\,(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$, untuk semua $x, y \in M$ dan semua $r \in R$.
2) Diberikan φ, ψ elemen dari $Hom_R(M, N)$. Didefinisikan $\varphi + \psi$ dengan $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$ untuk semua $m \in M$. Maka $\varphi + \psi \in Hom_R(M, N)$ dan dengan operasi penjumlahan ini $Hom_R(M, N)$ merupakan grup abelian. Jika R adalah ring komutatif, maka untuk $r \in R$ didefinisikan $r\varphi$ dengan $(r\varphi)(m) = r(\varphi(m))$ untuk semua $m \in M$. Maka $r\varphi \in Hom_R(M, N)$ sehingga $Hom_R(M, N)$ adalah modul atas ring R.
3) Jika $\varphi \in Hom_R\,(L, M)$ dan $\psi \in Hom_R\,(M, N)$ maka $\psi \circ \varphi \in Hom_R\,(L, N)$.
4) Dengan operasi penjumlahan seperti diatas dan pergandaaan yang didefinisikan sebagai komposisi fungsi, $Hom_R\,(M, M)$ adalah sebuah ring dengan satuan.

Bukti:

1) ($\Longrightarrow$) $\varphi: M \to N$ homomorfisma modul atas ring R,

$$\varphi\,(rx + y) = \varphi\, r(x) + \varphi(y)$$

$$= r\varphi(x) + \varphi(y)\ .$$

($\Longleftarrow$) $\varphi\,(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$, untuk setiap $x, y \in M, r \in R$.

Akan ditunjukkan φ homomorfisma

a. $\varphi\ (1x + y) = 1(\ \varphi(x) + \varphi(y))$

$= \varphi(x) + \varphi(y)$

b. $\varphi\ (rx) = \ \varphi\ (rx + 0)$, untuk setiap $y = 0\ \in R$

$= \ r\varphi(x) + \varphi(0)$

$= r\ \varphi(x)$.

Jadi φ homomorfisma.

2) Diberikan φ, ψ elemen dari $Hom_R(M, N)$.

Didefinisikan $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$, jika R ring komutatif, maka $r \in R$ didefinisikan $(r\ \varphi)(m) = r\varphi(m)$, untuk setiap $x, m\ \in M$, $r \in R$.

Akan ditunjukkan bahwa $Hom_R(M, N)$ grup abelian :

(i) tertutup

$\varphi + \psi\ \in\ Hom_R(M, N)$,

Didefinisikan $\varphi + \psi : M \to N$ homomorfisma modul atas ring *R*.

a) Diambil sembarang $m_1, m_2\ \in\ M$,

$(\varphi + \psi)(m_1 + m_2)$

= $\varphi(m_1 + m_2) +\ \psi(m_1 + m_2)$

= $\varphi(m_1) + \varphi(m_2) + \psi(m_1) + \psi(m_2)$

= $\varphi(m_1) + \psi(m_1) + \varphi(m_2) + \psi(m_2)$

= $(\varphi + \psi)(m_1) + (\varphi + \psi)(m_2)$.

b) Diambil sembarang $m\ \in\ M, r\ \in\ R$,

$(\varphi + \psi)(rm)$

$= \varphi(rm) + \psi(rm)$

$= r\ \varphi(m) + r\ \psi(m)$

$= r\ (\varphi(m) + \psi(m))$

$= r\ ((\varphi + \psi)(m))$.

Jadi $\varphi + \psi\ \in\ Hom_R(M, N)$.

(ii) Assosiatif

Didefinisikan $(\varphi + \psi) + \theta = \varphi + (\psi + \theta)$.

Diambil sembarang $m\ \in\ M$,

untuk setiap $\varphi, \psi, \theta \in Hom_R(M, N)$,

$((\varphi + \psi) + \theta)(m) = (\varphi + \psi)(m) + \theta(m)$

$= \big(\varphi(m) + \psi(m)\big) +\ \theta(m)$

$=\ \varphi(m) +\ \psi(m) + \theta(m)$

$= \varphi(m) + (\ \psi + \theta)(m)$

$= (\varphi + (\ \psi + \theta))(m)$.

Karena untuk setiap $m\ \in\ M$ memenuhi $((\varphi + \psi) + \theta)(m) =$ $(\varphi + (\ \psi + \theta))(m)$, maka $(\varphi + \psi) + \theta = \varphi + (\psi + \theta)$.

(iii) Elemen identitas

Misal $\alpha : M \to N$ yang didefinisikan $\alpha(m) = 0$, untuk setiap $m\ \in$ M.

Akan ditunjukkan $\alpha\ \in Hom_R(M, N)$

(1) misal $m_1, m_2\ \in\ M$,

$\alpha(m_1 + m_2) = 0$

= 0 + 0

= $\alpha(m_1) + \alpha(m_2)$.

(2) misal $m \in M, r \in R$,

$\alpha(rm)$ = 0

= r. 0

= $r.\alpha(m)$.

Untuk setiap $\varphi \in Hom_R(M,N)$.

Didefinisikan $\alpha + \varphi = \varphi + \alpha = \varphi$, untuk setiap $m \in M$,

$(\varphi + \alpha)(m)$ = $\varphi(m) + \alpha(m)$

= $\varphi(m) + 0$

= $\varphi(m)$,

$(\alpha + \varphi)(m)$ = $\alpha(m) + \varphi(m)$

= 0 + $\varphi(m)$

= $\varphi(m)$.

Karena untuk setiap $m \in M$ memenuhi $(\varphi + \alpha)(m) = (\alpha + \varphi)(m)$ = $\varphi(m)$, maka $\alpha + \varphi = \varphi + \alpha = \varphi$.

(iv) Invers

Untuk setiap $\varphi \in Hom_R(M,N)$ mempunyai invers penjumlahan jika $\varphi \in Hom_R(M,N)$ dan didefinisikan $(\varphi^{-1}): M \to N$

$\varphi^{-1}(m) = -\varphi(m)$.

Akan ditunjukkan $\varphi^{-1} \in Hom_R(M,N)$,

$\varphi^{-1}(m_1 + m_2) = -\varphi(m_1 + m_2)$

= $(-\varphi(m_1)) + (-\varphi(m_2))$

$= \varphi^{-1}(m_1) + \varphi^{-1}(m_2)$,

$\varphi^{-1}(rm) = -\varphi(rm)$

$= -r(\varphi(m))$

$= r\left(-\varphi(m)\right)$

$= r\ \varphi^{-1}(m)$.

Jadi $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Akan ditunjukkan φ mempnyai invers pada operasi penjumlahan.

$(\varphi + \varphi^{-1})(m) = \varphi(m) + \varphi^{-1}(m)$

$= \varphi(m) + (-\varphi(m))$

$= 0 = \alpha(m)$

Jadi φ mempnyai invers pada operasi penjumlahan.

(v) Karena N komutatif , maka $(\varphi + \psi) \in N$,

$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$

$= \psi(m) + \varphi(m)$

$= (\psi + \varphi)(m)$.

Oleh karena untuk setiap $m \in M$ memenuhi $(\varphi + \psi)(m) = (\psi + \varphi)(m)$ maka $(\varphi + \psi) = (\psi + \varphi) \in Hom_R(M, N)$.

Untuk setiap $\in R, \varphi \in Hom_R(M, N)$,

didefinisikan $(r\varphi)(m) = r\big(\varphi(m)\big)$.

Akan ditunjukkan $r\varphi \in Hom_R(M, N)$.

a. $(r\,\varphi)(m_1 + m_2) = r\big(\varphi(m_1 + m_2)\big)$

$= r\ (\varphi(m_1) + \varphi(m_2))$

$= r\ \varphi(m_1) + r\ \varphi(m_2)$

$= (r\ \varphi)(m_1) + (r\ \varphi)(m_2)$,

b. $(r\ \varphi)(sm) = r(\ \varphi(sm))$

$= r(s\ (\varphi(m))$

$= (rs)\ \varphi(m)$

$= (sr)\varphi(m)$ (karena R komutatif)

$= s\big(r\ \varphi(m)\big)$

$= s(r\varphi)(m)$.

Jadi $\varphi \in\ Hom_R(M,N), r\ \in R$.

Akan ditunjukkan $Hom_R(M,N)$ sebagai modul atas ring R.

1) Untuk setiap $s, r \in R, \varphi \in\ Hom_R(M,N)$,

   $(s + r)\varphi = s\varphi + r\varphi$,untuk setiap $m \epsilon M$

   $\big((s + r)\varphi\big)(m) = (s + r)\ \varphi(m)$

   $= s\ \varphi(m) + r\ \varphi(m)$

   $= (s\varphi + r\varphi)(m)$.

   Karena untuk setiap $m \epsilon M$, $\big((s + r)\varphi\big)(m) = (s\varphi + r\varphi)(m)$ maka

   $(s + r)\varphi = s\varphi + r\varphi$.

2) Untuk setiap $r \in R, \varphi, \psi\ \in\ Hom_R(M,N)$.

   Didefinisikan $(\varphi + \psi) = r\varphi + r\psi$.

   Diambil sembarang $m\ \in\ M,\ r \in R\ , \varphi, \psi\ \in\ Hom_R(M,N)$,

   $r(\varphi + \psi)(m) = r\big((\varphi + \psi)(m)\big)$

$= r(\varphi(m) + \psi(m)$

$= r\varphi(m) + r\psi(m)$

$= (r\varphi)(m) + \ (r\psi)(m)$

$= (r\varphi + r\psi)(m).$

Karena $m \in M$, $r(\varphi + \psi)(m) = (r\varphi + r\psi)(m)$ maka $r(\varphi + \psi) = r\varphi + r\psi$.

Jadi $Hom_R(M, N)$ sebagai modul atas R.

3) Jika $\varphi \in Hom_R(L, M)$ dan $\psi \in Hom_R(M, N)$ maka $\psi \circ \varphi \in Hom_R(L, N)$.

   bukti:

   Akan ditunjukkan $(\psi \circ \varphi) \in Hom_R(L, N)$.

   Diambil sembarang $\varphi \in Hom_R(M, N)$, $\psi \in Hom_R(M, N)$ dan untuk setiap $l_1, l_2 \in L, r \in R$,

   a) $(\psi \circ \varphi)(l_1 + l_2) = \psi(\varphi(l_1 + l_2))$

   $= \psi(\varphi(l_1) + \varphi(l_2))$

   $= \psi(\varphi(l_1)) + \psi(\varphi(l_2))$

   $= (\psi \circ \varphi)(l_1) + (\psi \circ \varphi)(l_2),$

   b) $(\psi \circ \varphi)(rl_1) = \psi(\varphi(rl_1)$

   $= \psi(r\varphi(l_1)$

   $= r\psi\big(\varphi(l_1)\big)$

   $= r(\psi \circ \varphi)(l_1).$

   Jadi $(\psi \circ \varphi) \in Hom_R(L, N)$.

4) $Hom_R(M, M)$ adalah ring dengan elemen satuan.

Akan ditunjukkan $Hom_R(M, M, +,\circ)$ ring dengan elemen satuan,

a) $Hom_R(M, M, +,\circ)$ grup abelian.

b) Bersifat assosiatif,

untuk setiap $\varphi, \psi, \theta \in Hom_R(M, M),\ m \in M$,

didefinisikan $(\varphi \circ \psi) \circ \theta = \varphi \circ (\psi \circ \theta)$,

$\big((\varphi \circ \psi) \circ \theta\big)(m) = (\varphi \circ \psi)(\theta(m))$

$= \varphi(\psi(\theta(m))$

$= \varphi\big((\psi \circ \theta)(m)\big)$

$= \big(\varphi \circ (\psi \circ \theta)\big)(m)$.

Karena $m \in M$ $\big((\varphi \circ \psi) \circ \theta\big)(m) = \big(\varphi \circ (\psi \circ \theta)\big)(m)$,

maka $(\varphi \circ \psi) \circ \theta = \varphi \circ (\psi \circ \theta)$

c) Mempunyai elemen identitas

Akan ditunjukkan $\varphi \circ \pi = \pi = \pi \circ \varphi$

didefinisikan $(m) = m$, untuk setiap $m \in M$,

$(\varphi \circ \pi)(m) = \varphi\big(\pi(m)\big) = \varphi(m)$,

$(\pi \circ \varphi)(m) = \pi\big(\varphi(m)\big) = \varphi(m)$.

d) Distributif

Diambil sembarang $\varphi, \psi, \theta \in Hom_R(M, M),\ m \in M$,

$\big((\varphi \circ \psi) + \theta\big)(m) = \big(\varphi(\psi + \theta)\big)(m)$

$= \varphi(\psi(m) + \theta(m))$

$= (\varphi \circ \psi)(m) + (\varphi \circ \theta)(m)$

$= ((\varphi \circ \psi) + (\varphi \circ \theta))(m)$.

Jadi $(\varphi \circ \psi) + \theta = ((\varphi \circ \psi) +)\varphi \circ \theta))$.

Jadi $Hom_R(M, M, +, \circ)$ ring dengan elemen satuan,

2.4 Teorema Isomorfisma

Teorema 2.4.1 [1]

Diberikan *M*,*N* modul atas ring *R*.

(1) Jika $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma modul atas R ,maka $\ker(\varphi)$ submodul M dan $M/\ker(\varphi) \cong \varphi(M)$.

(2) Jika *A*, *B* submodul pada *M* modul atas *R*, maka:

$(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$.

(3) Jika *A*,*B* submodul *M*, $A \subseteq B$, maka

$(M/A)/(B/A) \cong M/B$.

(4) Jika *C* submodul *M* modul atas *R*,

misal: $\mathcal{A} = \{A \subseteq M | A \text{ submodul } M \text{ yang memuat } C\}$,

$\mathcal{B} =$ keluarga submodul M/C ,

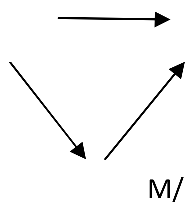
maka pemetaan $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ yang didefinisikan dengan $f(A) = A/C$ merupakan pemetaan bijektif yang memenuhi:

$f(A \cap B) = A \cap B/C$

$f(A + B) = (A + B)/C$, untuk setiap $A, B \in \mathcal{A}$.

bukti:

(1) Diberikan *M*, *N* modul atas *R* $\varphi: M \to N$ adalah homomorfisma modul atas *R*, diketahui bahwa $\ker(\varphi)$ sub modul M dan $M/\ker(\varphi) \cong \varphi(M)$.



Akan ditunjukkan $\ker(\varphi)$ submodul .

diambil sembarang $x, y \in \ker(\varphi), r \in R$,

berarti $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$,

sehingga $\varphi(x + ry) = \varphi(x) + \varphi(ry)$

$= \varphi(x) + r\varphi(y)$

$= 0 + 0 = 0.$

Jadi $x + ry \in \ker(\varphi)$, berarti $\ker(\varphi)$ submodul *M*.

Akan ditunjukkan $M/\ker(\varphi) \cong \varphi(m)$, artinya terdapat pemetaan isomorfisma $\mu : M/\ker(\varphi) \to \varphi(m)$.

Didefinisikan $\mu(x + \ker(\varphi)) = \varphi(x)$, untuk setiap $x + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi)$.

Akan ditunjukkan μ merupakan isomorfisma.

a) μ homomorfisma

Diambil sembarang $x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi) \in M/\ker(\varphi), r \in R$,

$\mu(r(x + \ker(\varphi)) + (y + \ker(\varphi)) = \mu(rx + \ker(\varphi)) + (y + \ker(\varphi))$,

$= \mu(rx + y) + \ker(\varphi)$

$= \varphi(rx + y)$

$= r\,\varphi(x) + \varphi(y)$ (karena φ homomorfisma modul atas R)

$= r\,\mu(x + \ker(\varphi)) + \mu(y + \ker(\varphi))$.

Jadi μ adalah homomorfisma modul atas *R*.

b) Akan ditunjukkan μ bijektif (injektif dan surjektif).

Akan ditunjukkan μ injektif,

misal $x + \ker(\varphi)\, , y + \ker(\varphi) \in\ M/\ker\,(\varphi)$,

$\mu\,(x + \ker(\varphi)) = \mu(y + \ker(\varphi))$,

$\varphi(x) = \varphi(y)$

$\varphi(x) - \varphi(y) = 0$

$\varphi(x - y) = 0$,

$x - y\ \in \ker(\varphi)$ karena $\ker(\varphi)$ submodul, maka $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$.

Jadi μ injektif.

Akan ditunjukkan μ surjektif,

diambil sembarang $\mathrm{b}\ \in\ \varphi(\mathrm{m})$ terdapat $\mathrm{a}\ \in\ \mathrm{M}$ sehingga $\varphi(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$

karena $\mathrm{a}\ \in\ \mathrm{M}$,maka $\mathrm{a} + \ker(\varphi) \in\ \mathrm{M}/\ker\,(\varphi)$,

$\mu(\mathrm{a} + \ker(\varphi)) = \varphi(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

Jadi μ surjektif.

Sehingga $\mathrm{M}/\ker\,(\varphi) \cong \varphi(\mathrm{m})$

(2) Diberikan *A*, *B* submodul pada *M* modul atas ring *R*, maka:

$$(A + B)/B \cong A/(A \cap B)\ .$$

Diberikan diagram komutatif sebagai berikut:

$\ker\,(\pi_A)$

$= A \cap B$

A/

$\pi_A(A)$

$= \dfrac{A + B}{B}$

dengan teorema:

didefinisikan $\pi: M \rightarrow M/B$ homomorfisma modul atas ring *R*,

$\pi(m) = m + B$, $m \in M, \pi(rm) = rm + B, r \in B.$

Didefinisikan $\pi_b = \pi_A(A) : A \rightarrow M/B$,

$\pi_A(a) = a + B, a \in A$,

$\ker(\pi_A) = A \cap B$,

$Im(\pi_A) = \pi_A(A) \subseteq M/B.$

Diambil sembarang $\bar{x} \in A$, $Im(\pi_A)$ terdapat $y \in A$,

$\pi_A(\bar{x}) = \bar{x} + B$,

$x + B \in \frac{(A+B)}{B} \subseteq M/B$,

$Im(\pi_0) = \frac{(A+B)}{B}$.

Dari teorema (1) didapat $M \xrightarrow{\varphi} N$ merupakan homomorfisma modul atas ring *R*.

Diketahui $M/\ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$ dari teorema (1),

$\frac{A}{\ker(\pi_0)} \cong Im(\pi_0)$,

$\frac{A}{A \cap B} \cong \frac{A+B}{B}$.

(3) Diberikan *M* modul atas ring R, *A*,*B* submodul M, $A \subseteq B$, maka

$(M/A)/(B/A) \cong M/B.$

$M/A = \{m + A | m \in M\}$,

Jika $\subseteq M$, maka $B/A \subseteq M/A$.

Didefinisikan : $M/A \rightarrow M/B$.

Akan ditunjukkan φ Hom_R modul atas ring *R*.

$\varphi(m + A) = m + B$, untuk setiap $(m_1 + A), (m_2 + A) \in M/A$,

$\varphi((m_1 + A) + (m_2 + A)) = \varphi((m_1 + m_2) + A)$

$= m_1 + m_2 + B$

$= (m_1 + B) + (m_2 + B)$

$= \varphi(m_1 + A) + \varphi(m_2 + A)$,

$\varphi\big(r(m + A)\big) = \varphi(rm + A)$

$= rm + B$, untuk setiap $r \in R, rB = B$

$= r(m + B)$

$= r\ \varphi(m + A)$.

Jadi $\varphi : M/A \rightarrow M/B\ Hom_R$ modul atas ring R.

$\ker(\varphi) = \{m + A \epsilon M/A \mid \varphi(m + A) = m + B = B\}$,

$= \{m + A | m \epsilon B\}$

$= B/A$.

Akan ditunjukkan φ surjektif,

untuk setiap $\bar{x} \in M/B$, sehingga $\bar{x} = x + B$ untuk $x \in M, x + A \in M/A$

dan $\varphi(x + A) = x + B$.

Jadi φ surjektif.

$Im(\varphi) = M/B$ dengan teorema (1)

$\frac{M/A}{ker(\varphi)} = \frac{M/A}{B/A} \cong Im(\varphi) = M/B$,

$\frac{M/A}{B/A} \cong M/B$.

(4) Diberikan N submodul M modul atas ring R.

Misal: $\mathcal{A} = \{A \subseteq M | A$ submodul M yang memuat $C\}$,

$\mathcal{B} =$ keluarga submodule M/C ,

Pemetaan $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$,

$f(A) = A/C$ merupakan pemetaan bijektif yang memenuhi:

$f(A \cap B) = A \cap B/C$,

$f(A + B) = (A + B)/C$, untuk setiap $A, B \epsilon \mathcal{A}$,

jika *A* dan *M* submodul atas ring *R*, maka *A/C* submodul *M/C*,

$x + C, y + C \in A/C, r \in R, x, y \in A$

= $(x + C) + r(y + C)$

$= (x + C) + (ry + C)$

$= (x + ry) + C) \in A/C.$

Jadi A/C submodul M/C.

Akan ditunjukkan $f(A) = A/C$ well define,

(i) Diketahui *A*=*B* submodul *M*,

$A \subseteq B = \frac{A}{C} \subseteq \frac{B}{C}$,

$B \subseteq A = \frac{B}{C} \subseteq \frac{A}{C}$,

$\frac{A}{N} = \frac{B}{N}$,

$f(A) = f(B)$, well define.

(ii) Akan ditunjukkan f injektif.

Untuk setiap $A, B \in \mathcal{A}$ dengan $f(a) = f(b), A/C = B/C$.

Diambil sembarang $x \in A$, $A + C \in A/C \subseteq B/C$, untuk setiap $x + C \in$

$A/C \Rightarrow x + C \in A/C$,

$\Rightarrow x + C \in B/C$,

$\Rightarrow$ terdapat $y \in B$ sehingga $x + C = y + C$,

$\Rightarrow x \in y + C$,

$\Rightarrow x \in B$,

Jadi $A \subseteq B$.

Diambil sembarang $y \in B, B + C \in B/C \subseteq A/C$,

untuk setiap $y + C \in A/C$,

$\Rightarrow y + C \in A/C$,

$\Rightarrow$ terdapat $y \in B$ sehingga $x + C = y + C$,

$\Rightarrow y \in x + C$,

Jadi $\subseteq A$.

Sehingga di dapat $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ sehingga $A = B$.

Jadi f injektif.

(iii)Akan ditunjukkan bahwa *f* surjektif

Untuk setiap $A, B \in \mathcal{A}$ dengan $f(A) = B$.

Diambil sembarang *A/C* submodul *M/C*, artinya untuk setiap $(x + C), (y + C) \in A/C, r \in R, x, y \in A$,

$(x + C) + r(y + C) \Rightarrow (x + ry) + C \in A/C$,

$\Rightarrow x + ry \in A$.

Akan ditunjukkan A submodul M

untuk setiap $c \in C$, $x + C = C \in A/C$,

Jadi $x \in A$, sehingga $C \subseteq A$.

Diketahui C submodul A,

jadi ada $A \in \mathcal{A}$ dengan $f(A) = A/C$,

maka didapat $x + ry \in A$ dan C submodul A (memuat C) sehingga f surjektif.

Dari (i), (ii) dan (iii) maka f : $\mathcal{A} \to \mathcal{B}, f(A) = A/C$ pemetaan bijektif.

2.5 Dirrect Summand

Teorema 2.5.1 [1]

Diberikan $N_1, N_2 \ldots., N_k$ submodul M modul atas ring R, maka pernyataan berikut equivalen:

(1) Pemetaan $\pi : N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k \to N_1 + N_2 + \cdots + N_k$,

$\pi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$,

adalah isomorfik : $N_1 + N_2 + \cdots + N_k \cong N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

(2) $N_j \cap \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k\right) = \{0\}$.

$j \in [1,2, \ldots, k]$.

(3) untuk setiap $x \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$dapat disajikan secara tunggal $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k\ a_i \in N_i$.

Bukti:

$(1) \Rightarrow (2)$

Andaikan $N_j \cap \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k\right) \neq 0$.

Diambil sembarang $a_j \in \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k\right) \cap N_j$ dengan $a_j \neq 0$.

$a_j = a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_k, a_i \in N_i$, *i= 1,2,…,k i* $\in$ *j*,

$a_j = a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_k \neq 0$,

$a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_k = 0$,

berarti ,

$\pi(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k) = a_1 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_k$,

$(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k) \in ker(\pi)$,

karena $a_j \neq \{0\}$ maka $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k) \neq \{0,0 \dots ,0,0\}$, π tidak injektif kontradiksi dengan $ker(\pi) = \{0\}$, sehingga π isomorfism.

$(2) \Rightarrow (3)$

Diketahui $N_j \cap \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k\right) = \{0\}, j \in \{1,2, \dots., k\}$,

akan ditunjukkan untuk setiap $x \epsilon N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ dapat disajikan secara tunggal sebagai $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Diambil sembarang $x \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$,

misalkan $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ dan $x = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ dengan $a_i, b_i \in N_i$, $i = 1,2, \dots, k$,

$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$,

$a_j - b_j = b_1 - a_1 + \dots + b_{j-1} - a_{j-1} + b_{j+1} - a_{j+1} + \cdots + b_k - a_k$,

berarti $a_j - b_j \in N_j \cap \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k\right) = \{0\}$,

sehingga $a_j - b_j = 0$, $a_j = b_j, j = 1,2,3 \dots. k$,

jadi untuk setiap $x \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ dapat disajikan secara tunggal sebagai $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

$(3) \Rightarrow (1)$

Diketahui $x \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ dapat disajikan secara tunggal sebagai $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Akan ditunjukkan $\pi : N_1 \times N_2 \times ... \times N_k \rightarrow N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ yang didefinisikan $\pi(a_1, a_2, ..., a_k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ merupakan isomorfisma modul atas ring R,

diambil sembarang $x, y \in N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$, $r \in R$ dengan

$x = (a_1, a_2, ..., a_k)$, $a_i \in N_i$, $i = 1,2, ..., k$,

$y = (b_1, b_2, ..., b_k)$, $b_i \in N_i$, $i = 1,2, ..., k$,

(i) $\pi(a_1, a_2, ..., a_k) + (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_\mathrm{k})$

$= \pi(a_1 + \mathrm{b}_1 , a_2 + \mathrm{b}_2 , ..., a_k + \mathrm{b}_\mathrm{k})$

$= a_1 + \mathrm{b}_1 , a_2 + \mathrm{b}_2 , ..., a_k + \mathrm{b}_\mathrm{k}$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b_1 + b_2 + \cdots + b_k$

$= \pi(a_1, a_2, ..., a_k) + \pi(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_\mathrm{k})$,

(ii) $\pi(r(a_1, a_2, ..., a_k)) = \pi(ra_1, ra_2, ..., ra_k)$

$= ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_k$

$= r(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$

$= r\, \pi(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Jadi $\pi : N_1 \times N_2 \times ... \times N_k \rightarrow N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ homomorfisma.

(iii)Diambil sembarang $x, y \in N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$

$x = (a_1, a_2, ..., a_k)$, $a_i \in N_i$, $i = 1,2, ..., k$,

$y = (b_1, b_2, ..., b_k)$, $b_i \in N_i$, $\mathrm{i} = 1,2, ..., \mathrm{k}$,

misalkan $\pi(x) = \pi(y)$,

$\pi(a_1, a_2, ..., a_k) = \pi(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_\mathrm{k})$,

$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$, karena penyajian dalam $N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ tunggal maka $a_i = b_i$, $i = 1,2,..,k$ diperoleh $x = (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k) = y$, sehingga π injektif.

Ambil sembarang $x \in N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$,

menurut yang diketahui x dapat disajikan secara tunggal $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ dengan $a_i \in N_i$, $i = 1,2,..,k$, sehingga diperoleh $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = x$, maka π surjektif.

Dari persamaan (i), (ii) dan (iii) didapat bahwa π isomorfisma.

Definisi 2.5.2 [1]

Jika N_1, N_2 submodul dari *M* modul atas ring *R* yang memenuhi teorema 2.5.1 maka penulisan $N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ ditulis dengan $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$.